SEP SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA | DGB DIRECCIÓN GENERAL DEL BACHILLERATO | ceb CENTRO DE ESTUDIOS DE BACHILLERATO Nº 4/2 "LIC. JESÚS REYES HEROLES

GUÍA DE ESTUDIO DEL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE:

CÁLCULO INTEGRAL.

ELABORADA POR LA ACADEMIA DE MATEMÁTICAS.

SEMESTRE: 2012–2013 B SEXTO

INSTRUCCIONES.

CADA ALUMNO DEBE REALIZAR Y ENTREGAR LAS ACTIVIDADES DE FORMA INDIVIDUAL.
LAS ACTIVIDADES DEBERÁN TOMARSE DEL DOCUMENTO Y RESOLVERSE COMO LOS EJEMPLOS INCLUIDOS.
CADA ACTIVIDAD DEBE ENTREGARSE POR SEPARADO Y EN EL ORDEN INDICADO, EN FORMA CLARA Y LIMPIA.
LA FECHA LÍMITE DE ENTREGA SERÁ EL DÍA DEL EXAMEN DE ACUERDO AL CALENDARIO OFICIAL.
SE PUEDEN CONSULTAR DUDAS EN LA ACADEMIA DE MATEMÁTICAS Y/O CON EL PROFESOR RESPONSABLE.

CONTENIDO:

Propósito de la asignatura:

La asignatura de CÁLCULO INTEGRAL le permite al estudiante contar con una cultura matemática sólida, mediante la cual puede analizar cualitativa y cuantitativamente los diferentes fenómenos que se le presenten en su entorno cotidiano y profesional, por ejemplo: determinar el punto de equilibrio del costo de un artículo y el flujo de inversión neta de una empresa; aplicar las leyes de crecimiento poblacional en la biología; determinar variables cinemáticas, dinámicas y eléctricas en física. Además, proporciona herramientas para el desarrollo individual y social del individuo.

Competencias Disciplinares a desarrollar:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenido por bloques:

Bloque I

Nombre del Bloque	Aplicas la diferencial en estimación de errores y aproximaciones.
Objetos de Aprendizaje	La diferencial. Aproximaciones de variables. Estimación de errores.
Unidades de competencia	Interpreta gráficamente el modelo matemático de fenómeno de su entorno y aproxima el comportamiento de su derivada a partir del cálculo de la diferencial. Analiza el error obtenido mediante la aplicación de la diferencial para determinar la precisión en la medición de una magnitud y como afecta la confiabilidad de ésta en situaciones reales de su contexto. Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores fortalezas y debilidades al trabajar con aproximaciones y estimación de errores.

Bloque II

Nombre del Bloque	Determinas la primitiva de una función e integras funciones algebraicas y trascendentes.
Objetos de Aprendizaje	Funciones primitivas. Integral Indefinida.
Unidades de competencia	Resuelve problemas que involucren la obtención de la primitiva de una función y la interpreta en situaciones reales de su entorno. Desarrolla la habilidad en el manejo de técnicas de integración en un contexto teórico.

Bloque III

Nombre del Bloque	Calculas e interpretas el área bajo la curva.
Objetos de Aprendizaje	Sumas de Riemann. Integral definida.
Unidades de competencia	Resuelve problemas de áreas mediante la sumas de Riemann. Resuelve problemas de áreas mediante la integral definida. Asume una actitud constructiva y congruente con las competencias con las que cuenta en el uso de las TIC´s como herramientas para el modelado y la simulación de problemas de áreas bajo la curva.

Bloque IV

Nombre del Bloque	Resuelves problemas de aplicación de la integral definida en situaciones reales en las ciencias exactas, sociales, naturales y administrativas
Objetos de Aprendizaje	Áreas y volúmenes de sólidos de revolución.
Unidades de competencia	Identifica casos factibles de aplicación de la integral definida. Valora el uso de las TIC´s como herramientas para el modelado y la simulación de problemas de aplicación de integrales definidas en cualquier contexto disciplinar. Asume una actitud constructiva, congruente a sus competencias para proponer maneras de solucionar un problema de su entorno mediante la aplicación de la integral diferenciada.

ACTIVIDADES

BLOQUE I

Actividad 1. Diferenciales.

Encuentre el diferencial dy de la función.

1. $y = x^4 + 5x$
2. $y = 3x^5 + x^2 - x$
3. $y = 1 - x^2 + x^3$
4. $y = 5\cos x + \ln x$
5. $y = e^x + 2\cot x$
6. $y = x^7 + 2\operatorname{sen} x$
7. $y = \sec x + \csc x$
8. $y = \ln x + \sqrt{x}$
9. $y = \tan x - \csc x$
10. $y = x^{-3} - 1/x$
11. $y = x^6 \tan x$
12. $y = e^x \operatorname{sen} x$
13. $y = x^2 e^x$
14. $y = \operatorname{sen} x \tan x$
15. $y = (1+2x)^4$
16. $y = \left(x^7 + \operatorname{sen} x\right)^8$
17. $y = \left(1 + x^3 + x^5\right)^6$
18. $y = \sqrt{x^2 + e^x}$
19. $y = \operatorname{sen}\left(5x^2 - 3x\right)$
20. $y = \cot\left(x^2 - x\right)$
21. $y = \sec\left(1 - x^2\right)$
22. $y = \ln\left(x^2 - x + 1\right)$
23. $y = \ln\left(1 - x^4\right)$
24. $y = e^{x^2 + 2x}$
25. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

Actividad 2. Aplicaciones del Diferencial.

Resolver los siguientes problemas.

1. Use diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una capa de pintura de 0.05 cm de ancho en un domo hemisférico con un diámetro de 50 m.
2. Una ventana tiene la forma de un cuadrado. La base de la ventana se mide como si tuviera un ancho de 60 cm con un error posible en la medición de 0.1 cm. Use diferenciales para estimar el error posible máximo al calcular el área de la ventana.
3. Las seis caras de una caja cubica metálica tienen un grosor de 0.125cm y el volumen del interior de la caja es de 40cm^3. Utilice diferenciales para aproximar el volumen de metal empleado para fabricar la caja.
4. El interior de un tanque cilíndrico abierto es de 12m de diámetro y 8 m de profundidad. El fondo es de cobre y los lados son de acero. Utilice diferenciales para encontrar de manera aproximada cuantos galones de pintura a prueba de agua es necesaria para aplicar una capa de 0.5mm a la parte de acero del interior del tanque.
5. Una copa cónica de 10cm de altura y 8cm de ancho en la parte superior, se llena con agua hasta una profundidad de 9cm. Un cubo de hielo de 3cm de lado está a punto de depositarse en la copa. Utilice diferenciales para determinar si se derramará la copa.
6. Use diferenciales para estimar el número indicado.
   - i. $\sqrt{25.02}$
   - ii. $\sqrt{36.1}$
   - iii. $(3.05)^3$
   - iv. $(1.95)^2$
   - v. $1/10.1$
   - vi. $4/2.1$

BLOQUE II

Actividad 1. Integral Indefinida General.

Encuentre la integral indefinida general.

1. $\int \left(x^3+6x+1\right)dx$
2. $\int \left(x^5-5x^4-6x^2\right)dx$
3. $\int \left(4x^3-3x^2+2x\right)dx$
4. $\int \left(1-x-x^2\right)dx$
5. $\int \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{5}\right)dx$
6. $\int \left(1/x^3+5/x^6+\sqrt[4]{x}\right)dx$
7. $\int \left(1/x^4+\sqrt[4]{x}+x^4\right)dx$
8. $\int \left(\ln x+10^x\right)dx$
9. $\int \left(\operatorname{sen} x+\sec^2 x\right)dx$
10. $\int \left(2^x+2e^x\right)dx$
11. $\int \left(1/x+e^x\right)dx$
12. $\int (5\cos x+\tan x)dx$
13. $\int \left(3^x+x^3+3x\right)dx$
14. $\int (2\ln x-5\cot x)dx$
15. $\int \left(\sec x\tan x+\sec^2 x\right)dx$

Actividad 2. Integración por Sustitución o Cambio de Variable.

Evalúe la integral efectuando la sustitución indicada.

1. $\int \cos 3x dx, \quad u=3x$
2. $\int x\sec x^2\tan x^2 dx, \quad u=x^2$
3. $\int \frac{x}{x^2+1}dx, \quad u=x^2+1$
4. $\int x\left(4+x^2\right)^{10}dx, \quad u=4+x^2$
5. $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x dx, \quad u=\operatorname{sen} x$
6. $\int (1+2x)^3 dx, \quad u=1+2x$
7. $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx, \quad u=x^3+1$
8. $\int \frac{4x^3+7x^6}{1+x^4+x^7}dx, \quad u=1+x^4+x^7$
9. $\int \left(1+e^x\right)\left(x+e^x\right)^3 dx, \quad u=x+e^x$
10. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx, \quad u=\sqrt{x}$

Actividad 3. Integración por Partes.

Evalúe la integral por partes con los valores de u y dv indicados.

1. $\int x\cos x dx\ ; \quad u=x\ , \quad dv=\cos x dx$
2. $\int x\sec^2 x dx\ ; \quad u=x\ , \quad dv=\sec^2 x dx$
3. $\int x\ln x dx\ ; \quad u=\ln x\ , \quad dv=x dx$
4. $\int xe^x dx\ ; \quad u=x\ , \quad dv=e^x dx$
5. $\int \ln x dx; \quad u=\ln x\ , \quad dv=dx$

Actividad 4. Integración por Sustitución Trigonométrica.

Evalúe la integral usando la sustitución trigonométrica indicada. Dibuje y rotule el triángulo rectángulo asociado.

1. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx, \quad x=3\sec\theta$
2. $\int \frac{1}{x^2-4}dx, \quad x=2\sec\theta$
3. $\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx, \quad x=\tan\theta$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}dx, \quad x=5\tan\theta$
5. $\int \frac{\sqrt{36-x^2}}{x^2}dx, \quad x=6\operatorname{sen}\theta$
6. $\int \frac{x^2}{9-x^2}dx, \quad x=3\operatorname{sen}\theta$

Actividad 5. Integración por Fracciones Parciales.

Evalúe la integral usando la descomposición en fracciones parciales

1. $\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}dx$
2. $\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}dt$
3. $\int \frac{x^2+1}{x^3-x}dx$
4. $\int \frac{2x+3}{(x+1)^2}dx$
5. $\int \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}dy$
6. $\int \frac{s}{(s+2)^2}ds$

BLOQUE III

Actividad 1. Área bajo la curva. Suma de Riemann.

Resuelva cada uno de los siguientes problemas.

1. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = 25 - x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 5$ con $n = 5$ subintervalos de aproximación y usando los puntos medio como puntos muestra. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación.
2. Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = x^3 + 2$ en $[-1, 2]$ usando seis rectángulos y los puntos medios como puntos muestra. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación.

Actividad 2. Área bajo la curva. Integral Definida.

Encuentre el área bajo la curva de la función dada en el intervalo indicado. Dibuje la curva y el área buscada.

1. $f(x) = 3x^2 - 9x$ en $[0, 2]$
2. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ en $[-2, 2]$

Actividad 3. Área entre curvas.

Encuentre el área entre las curvas de las funciones dadas. Trace la grafica respectiva y dibuje el área buscada.

1. $f(x) = 2x + 6$ y $f(x) = 9 - x^2$
2. $y = 2 - x^2, \quad y = x^4$

BLOQUE IV

Actividad 1. Volumen de Revolución.

Encuentre el volumen de revolución generado por el área bajo la curva $f(x) = \cos x$ en $[0, \pi]$ **al girar alrededor del eje X.** Mostrar:

- i) la gráfica de la función en el intervalo indicado.
- ii) La gráfica del cuerpo geométrico generado.
- iii) La integral que debe resolverse para encontrar el volumen.
- iv) El volumen del cuerpo geométrico generado.

Actividad 2. Superficie de revolución.

Encuentre la superficie de revolución generada por el arco de la curva $f(x) = x^3 - x + 1$ en $[-1, 2]$ **al girar alrededor del eje X.** Mostrar:

- i) la gráfica de la función en el intervalo indicado.
- ii) La gráfica del cuerpo geométrico generado.
- iii) La integral que debe resolverse para encontrar la superficie.
- iv) La superficie del cuerpo geométrico que genera la curva.

Actividad 3. Longitud de arco.

Encuentre la longitud del arco de la curva $f(x) = x^2 + x$ en $[-2, 2]$**.** Mostrar:

- i) la gráfica de la función en el intervalo indicado.
- ii) La integral que debe resolverse para encontrar la longitud del arco.
- iii) La longitud del arco indicado.

Ejemplos.

Bloque II. Actividad 1. Integral Indefinida General

Ejemplo 1: Encuentre la integral indefinida $\int\left(x^2-x-3\right)dx$

Solución: En este caso se deben aplicar las reglas básicas de integración, además de la propiedad de las integrales que permite separar los términos para integrarlos cada uno por separado. (Consulta tu formulario)

$$\int\left(x^2-x-3\right)dx=\int x^2dx-\int xdx-3\int dx$$
$$=\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2-3x+C$$

Ejemplo 2: Encuentre la integral indefinida $\int\left(3x^5-5x^2-3x\right)dx$

Solución: Recuerda aplicar las reglas básicas de integración

$$\int\left(3x^5-5x^2-3x\right)dx=3\int x^5dx-5\int x^2dx-3\int xdx$$
$$=3\left(\tfrac{1}{6}x^6\right)-5\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)-3\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}x^6-\tfrac{5}{3}x^3-\tfrac{3}{2}x^2+C$$

Ejemplo 3: Encuentre la integral indefinida $\int\left(1+\tfrac{1}{3}x-\tfrac{3}{2}x^2-12x^3\right)dx$

Solución: Recuerda aplicar las reglas básicas de integración

$$\int\left(1+\tfrac{1}{3}x-\tfrac{3}{2}x^2-12x^3\right)dx=\int 1dx+\tfrac{1}{3}\int xdx-\tfrac{3}{2}\int x^2dx-12\int x^3dx$$
$$=x+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)-\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)-12\left(\tfrac{1}{4}x^4\right)$$
$$=x+\tfrac{1}{6}x^2-\tfrac{1}{2}x^3-3x^4+C$$

Ejemplo 4: Encuentre la integral indefinida $\int\left(3x^{1/2}-7x^{3/8}+2x^{-3}+5x^{-2/3}\right)dx$

Solución: Recuerda aplicar las reglas básicas de integración

$$\int\left(3x^{1/2}-7x^{3/8}+2x^{-3}+5x^{-2/3}\right)dx=3\int x^{1/2}dx-7\int x^{3/8}dx+2\int x^{-3}dx+5\int x^{-2/3}dx$$
$$=3\left(\tfrac{1}{3/2}x^{3/2}\right)-7\left(\tfrac{1}{11/8}x^{11/8}\right)+2\left(\tfrac{1}{-2}x^{-2}\right)+5\left(\tfrac{1}{1/3}x^{1/3}\right)$$
$$=2x^{3/2}-\tfrac{56}{11}x^{11/8}-x^{-2}+15x^{1/3}+C$$

Ejemplo 5: Encuentre la integral indefinida $\int\left(\frac{2}{x^4}+\frac{3}{5x^5}-\frac{1}{x^6}\right)dx$

Solución: En algunos casos es necesario convertir la integral para poder aplicar las reglas básicas de integración, como en este caso en que se debe reescribir la variable con exponente negativo.

$$\int\left(\frac{2}{x^4}+\frac{3}{5x^5}-\frac{1}{x^6}\right)dx=\int\left(2x^{-4}+\tfrac{3}{5}x^{-5}-x^{-6}\right)dx=2\int x^{-4}dx+\tfrac{3}{5}\int x^{-5}dx-\int x^{-6}dx$$
$$=2\left(\tfrac{1}{-3}x^{-3}\right)+\tfrac{3}{5}\left(\tfrac{1}{-4}x^{-4}\right)-\left(\tfrac{1}{-5}x^{-5}\right)=-\frac{2}{3x^3}-\frac{3}{20x^4}+\frac{1}{5x^5}+C$$

CEB 4/2
Academia de Matemáticas
L. M. A. Juan Manuel Valdez Chávez

Ejemplo 6: Encuentre la integral indefinida $\int\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^3}-\sqrt[5]{x^2}\right)dx$

Solución: En algunos casos es necesario convertir la integral para poder aplicar las reglas básicas de integración, como en este caso, se debe reescribir con exponente fraccionario.

$$\int\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^3}-\sqrt[5]{x^2}\right)dx=\int\left(x^{1/2}-x^{1/3}+x^{3/2}-x^{2/5}\right)dx$$

$$=\int x^{1/2}dx-\int x^{1/3}dx-\int x^{3/2}dx+\int x^{2/5}dx$$

$$=\frac{1}{3/2}x^{3/2}-\frac{1}{4/3}x^{4/3}+\frac{1}{5/2}x^{5/2}-\frac{1}{7/5}x^{7/5}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7}+C$$

Ejemplo 7: Encuentre la integral indefinida $\int\left(\frac{2}{x^3}-5\sqrt{x}-x\right)dx$

Solución: Reescribimos la integral para poder aplicar las reglas básicas de integración.

$$\int\left(\frac{2}{x^3}-5\sqrt{x}-x\right)dx=\int\left(2x^{-3}-5x^{1/2}-x\right)dx$$

$$=2\int x^{-3}dx-5\int x^{1/2}dx-\int xdx$$

$$=2\left(\frac{1}{-2}x^{-2}\right)-5\left(\frac{1}{3/2}x^{3/2}\right)-\frac{1}{2}x^2$$

$$=-\frac{1}{x^2}-\frac{10}{3}\sqrt[2]{x^3}-\frac{1}{2}x^2+C$$

Ejemplo 8: Encuentre la integral indefinida $\int\left(\frac{5}{3x^4}+\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x^3}-\sqrt[5]{x}\right)dx$

Solución: Reescribimos la integral para poder aplicar las reglas básicas de integración.

$$\int\left(\frac{5}{3x^4}+\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x^3}-\sqrt[5]{x}\right)dx=\int\left(\frac{5}{3}x^{-4}+4x^{-1/2}+3x^{3/2}-x^{1/5}\right)dx$$

$$=\frac{5}{3}\int x^{-4}dx+4\int x^{-1/2}dx+3\int x^{3/2}dx-\int x^{1/5}dx$$

$$=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{-3}x^{-3}\right)+4\left(\frac{1}{1/2}x^{1/2}\right)+3\left(\frac{1}{5/2}x^{5/2}\right)-\left(\frac{1}{6/5}x^{6/5}\right)$$

$$=-\frac{5}{9x^3}+8\sqrt{x}+\frac{6}{5}\sqrt{x^5}-\frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6}+C$$

Ejemplo 9: Encuentre la integral indefinida $\int\left(\ln x-e^x+\cos x\right)dx$

Solución: Para este tipo de integrales consulta el formulario de integrales básicas, recuerda que en estos casos la integral se obtiene de forma inmediata por el criterio de la antiderivada.

$$\int\left(\ln x-e^x+\cos x\right)dx=\int \ln xdx-\int e^xdx+\int \cos xdx=\left(x\ln x-x\right)-e^x+\operatorname{sen}x+C$$

Ejemplo 10: Encuentre la integral indefinida $\int\left(2^x-\sec^2 x+\cot x\right)dx$

Solución: Recuerda aplicar las reglas básicas de integración. (Formulario)

$$\int\left(2^x-\sec^2 x+\cot x\right)dx=\int 2^x dx-\int\sec^2 xdx+\int\cot xdx=\tfrac{1}{\ln 2}2^x-\tan x-\ln\left(\csc x\right)+C$$

Ejemplo 11: Encuentre la integral indefinida $\int\left(\sec x\tan x-\csc^2 x\right)dx$

Solución: Recuerda aplicar las reglas básicas de integración. (Formulario)

$$\int\left(\sec x\tan x-\csc^2 x\right)dx=\int\sec x\tan xdx-\int\csc^2 xdx=\sec x+\cot x+C$$

Ejemplo 12: Encuentre la integral indefinida $\int\left(5\operatorname{sen}x+3\ln x\right)dx$

Solución: Recuerda aplicar las reglas básicas de integración. (Formulario)

$$\int\left(5\operatorname{sen}x+3\ln x\right)dx=5\int\operatorname{sen}xdx+3\int\ln xdx=-5\cos x+3\left(x\ln x-x\right)+C$$

Bloque II. Actividad 2. Integración por Sustitución o Cambio de Variable

Ejemplo 1: Evalúe la integral efectuando la sustitución adecuada $\int 2x\left(x^2+3\right)^4 dx$

Solución: Tomamos a $u=x^2+3$, por lo que $du=2xdx$ y al sustituir tenemos

$$\int 2x\left(x^2+3\right)^4 dx=\int\left(x^2+3\right)^4 2xdx=\int u^4du=\tfrac{1}{5}u^5=\tfrac{1}{5}\left(x^2+3\right)^5+C$$

Ejemplo 2: Evalúe la integral efectuando la sustitución adecuada $\int\sqrt{x-1}dx$

Solución: Tomamos a $u=x-1$, por lo que $du=dx$ y al sustituir tenemos

$$\int\sqrt{x-1}dx=\int\sqrt{u}du=\int u^{1/2}du=\tfrac{1}{3/2}u^{3/2}=\tfrac{2}{3}\sqrt{u^3}=\tfrac{2}{3}\sqrt{\left(x-1\right)^3}+C$$

Ejemplo 3: Evalúe la integral efectuando la sustitución adecuada $\int\frac{x}{x^2+1}dx$

Solución: Tomamos a $u=x^2+1$, por lo que $du=2xdx$, al sustituir completamos du y tenemos

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx=\tfrac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}=\tfrac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\tfrac{1}{2}\ln u=\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$$

Ejemplo 4: Evalúe la integral efectuando la sustitución adecuada $\int\cos\left(5x-1\right)dx$

Solución: Tomamos a $u=5x-1$, por lo que $du=5dx$ y al sustituir y completar tenemos

$$\int\cos\left(5x-1\right)dx=\tfrac{1}{5}\int\cos\left(5x-1\right)5dx=\tfrac{1}{5}\int\cos udu=\tfrac{1}{5}\operatorname{sen}u=\tfrac{1}{5}\operatorname{sen}\left(5x-1\right)+C$$

Ejemplo 5: Evalúe la integral efectuando la sustitución adecuada $\int\sec x\tan x\sqrt{\sec x}dx$

Solución: Tomamos a $u=\sec x$, por lo que $du=\sec x\tan xdx$ y al sustituir tenemos

$$\int\sec x\tan x\sqrt{\sec x}dx=\int\sqrt{\sec x}\sec x\tan xdx=\int\sqrt{u}du=\tfrac{2}{3}\sqrt{u^3}=\tfrac{2}{3}\sqrt{\left(\sec x\right)^3}+C$$

Ejemplo 6: Evalúe la integral efectuando la sustitución adecuada $\int\cos x\cos\left(\operatorname{sen}x\right)dx$

Solución: Tomamos a $u=\operatorname{sen}x$, por lo que $du=\cos xdx$ y al sustituir tenemos

$$\int\cos x\cos\left(\operatorname{sen}x\right)dx=\int\cos\left(\operatorname{sen}x\right)\cos xdx=\int\cos udu=\operatorname{sen}u=\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}x\right)+C$$

Ejemplo 7: Evalúe la integral efectuando la sustitución adecuada $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

Solución: Tomamos a $u=\ln x$, por lo que $du=\frac{1}{x}dx$ y al sustituir tenemos

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int(\ln x)^2\frac{1}{x}dx=\int u^2du=\tfrac{1}{3}u^3=\tfrac{1}{3}(\ln x)^3+C$$

Ejemplo 8: Evalúe la integral efectuando la sustitución adecuada $\int \sec^2\theta e^{\tan\theta}d\theta$

Solución: Tomamos a $u=\tan\theta$, por lo que $du=\sec^2\theta d\theta$ y al sustituir tenemos

$$\int \sec^2\theta e^{\tan\theta}d\theta=\int e^{\tan\theta}\sec^2\theta d\theta=\int e^u du=e^u=e^{\tan\theta}+C$$

Bloque II. Actividad 3. Integración por Partes

Ejemplo 1: Encontrar $\int xe^x dx$

Solución: Sean $u=x$ y $dv=e^x dx$, entonces $du=dx$ y $v=\int e^x dx=e^x$, y luego sustituimos en la integral

$$\int \overset{u}{x}\,\overset{dv}{e^x dx}=\overset{u}{(x)}\overset{v}{(e^x)}-\int \overset{v}{e^x}\,\overset{du}{dx}=xe^x-e^x+C$$

Ejemplo 2: Encontrar $\int x\ln x dx$

Solución: Sean $u=\ln x$ y $dv=xdx$, entonces $du=\frac{1}{x}dx$ y $v=\int xdx=\frac{1}{2}x^2$, y luego sustituimos en la integral

$$\int \overset{u}{\ln x}\,\overset{dv}{xdx}=\overset{u}{(\ln x)}\overset{v}{\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)}-\int \overset{v}{\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)}\overbrace{\left(\frac{1}{x}dx\right)}^{du}$$

$$=\tfrac{1}{2}x^2\ln x-\tfrac{1}{2}\int xdx$$

$$=\tfrac{1}{2}x^2\ln x-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}x^2\ln x-\tfrac{1}{4}x^2+C$$

Ejemplo 3: Encontrar $\int 3x\cos 4x dx$

Solución: Sean $u=3x$ y $dv=\cos 4xdx$, entonces $du=3dx$ y $v=\int \cos 4xdx=\frac{1}{4}\int \cos 4x4dx=\frac{1}{4}\mathrm{sen}4x$

$$\int \overset{u}{3x}\overbrace{\cos 4xdx}^{dv}=\overset{u}{(3x)}\overbrace{\left(\tfrac{1}{4}\mathrm{sen}4x\right)}^{v}-\int \overbrace{\tfrac{1}{4}\mathrm{sen}4x}^{v}\,\overset{du}{3dx}$$

$$=\tfrac{3}{4}x\mathrm{sen}4x-\tfrac{3}{4}\int \mathrm{sen}4xdx$$

$$=\tfrac{3}{4}x\mathrm{sen}x-\tfrac{3}{4}\left(-\tfrac{1}{4}\cos 4x\right)$$

$$=\tfrac{3}{4}x\mathrm{sen}4x+\tfrac{3}{16}\cos 4x+C$$

CEB 4/2
Academia de Matemáticas
L. M. A. Juan Manuel Valdez Chávez

Ejemplo 4: Encontrar $\int \arccos x dx$

Solución: Sean $u = \arccos x$ y $dv = dx$, entonces $du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ y $v = \int dx = x$ y luego sustituimos.

$$\int \overbrace{\arccos x}^{u} \overset{dv}{dx} = \overbrace{(\arccos x)}^{u}\overset{v}{(x)} - \int \overset{v}{(x)} \overbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)}^{du}$$

$$= x\arccos x - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arccos x - \tfrac{1}{2}\int \frac{-2xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\arccos x - \tfrac{1}{2}\left(2\sqrt{1-x^2}\right) = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Ejemplo 5: Encontrar $\int 2^x x dx$

Solución: Sean $u = x$ y $dv = 2^x dx$, entonces $du = dx$ y $v = \int 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}2^x$ y luego sustituimos en la integral

$$\int \overset{u}{x} \overset{dv}{2^x dx} = \overset{u}{(x)}\overbrace{\left(\tfrac{1}{\ln 2}2^x\right)}^{v} - \int \overbrace{\left(\tfrac{1}{\ln 2}2^x\right)}^{v}\overset{du}{(dx)}$$

$$= \tfrac{1}{\ln 2}x2^x - \tfrac{1}{\ln 2}\int 2^x dx = \tfrac{1}{\ln 2}x2^x - \tfrac{1}{\ln 2}\left(\tfrac{1}{\ln 2}2^x\right)$$

$$= \tfrac{1}{\ln 2}2^x\left(x - \tfrac{1}{\ln 2}\right)$$

Ejemplo 6: Encontrar $\int x\sec^2 x dx$

Solución: Sean $u = x$ y $dv = \sec^2 x dx$, entonces $du = dx$ y $v = \int \sec^2 x dx = \tan x$

$$\int \overset{u}{x} \overbrace{\sec^2 x dx}^{dv} = \overset{u}{(x)}\overbrace{(\tan x)}^{v} - \int \overbrace{(\tan x)}^{v}\overset{du}{(dx)} = x\tan x - \int \tan x dx = x\tan x - \ln(\sec x) + C$$

Ejemplo 7: Encontrar $\int \ln(x+1)dx$

Solución: Sean $u = \ln(x+1)$ y $dv = dx$, entonces $du = \dfrac{1}{x+1}dx$ y $v = \int dx = x$, luego sustituyendo

$$\int \overbrace{\ln(x+1)}^{u}\overset{dv}{dx} = \overbrace{(\ln(x+1))}^{u}\overset{v}{(x)} - \int \overset{v}{(x)}\overbrace{\left(\frac{1}{x+1}dx\right)}^{du}$$

$$= x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx = x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

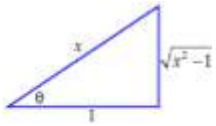
$$= x\ln(x+1) - \int 1dx + \int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C$$

CEB 4/2
Academia de Matemáticas
L. M. A. Juan Manuel Valdez Chávez

Bloque II. Actividad 4. Integración por Sustitución Trigonométrica.

Ejemplo 1: Encontrar $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

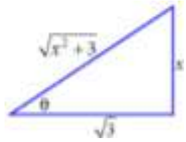


Solución: Sea $x=\sec\theta$, entonces $dx=\sec\theta\tan\theta d\theta$ y sustituyendo tenemos

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\int \frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}\sec\theta\tan\theta d\theta=\int\sqrt{\tan^2\theta}\tan\theta d\theta=\int\tan\theta\tan\theta d\theta$$

$$=\int\tan^2\theta d\theta=\tan\theta-\theta=\boxed{\sqrt{x^2-1}-\operatorname{arcsec}x+C}$$

Ejemplo 2: Encontrar $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$

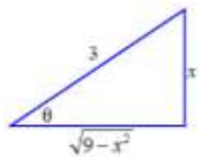


Solución: Sea $x=\sqrt{3}\tan\theta$, entonces $dx=\sqrt{3}\sec^2\theta d\theta$ y sustituyendo tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}=\int \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\tan\theta\right)^2+3}}=\int \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{3\tan^2\theta+3}}=\int \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{3\left(\tan^2\theta+1\right)}}=\int \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{3\sec^2\theta}}$$

$$=\int \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{3}\sec\theta}=\int\sec\theta d\theta=\ln(\sec\theta+\tan\theta)=\boxed{\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}}+\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C}$$

Ejemplo 3: Encontrar $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

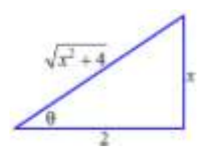


Solución: Sea $x=3\sin\theta$, entonces $dx=3\cos\theta d\theta$ y sustituyendo tenemos

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx=\int \frac{\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}}{(3\sin\theta)^2}3\cos\theta d\theta=\int \frac{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}{9\sin^2\theta}3\cos\theta d\theta=\int \frac{\sqrt{9\cos^2\theta}}{9\sin^2\theta}3\cos\theta d\theta$$

$$=\int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta}3\cos\theta d\theta=\int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int\cot^2\theta d\theta=-\cot\theta-\theta=\boxed{-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{3}+C}$$

Ejemplo 4: Encontrar $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

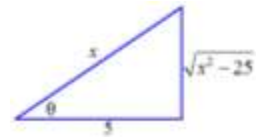


Solución: Sea $x=2\tan\theta$, entonces $dx=2\sec^2\theta d\theta$ Sustituyendo tenemos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=\int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{2\tan\theta\sqrt{(2\tan\theta)^2+4}}=\int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{2\tan\theta\sqrt{4\tan^2\theta+4}}=\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan\theta\sqrt{4\left(\tan^2\theta+1\right)}}=\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan\theta\sqrt{4\sec^2\theta}}$$

$$=\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan\theta\left(2\sec\theta\right)}=\tfrac{1}{2}\int\frac{\sec\theta}{\tan\theta}d\theta=\tfrac{1}{2}\int\csc\theta d\theta=\tfrac{1}{2}\ln\left(\csc\theta-\cot\theta\right)=\boxed{\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}-\frac{2}{x}\right)+C}$$

Ejemplo 5: Encontrar $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}dx$

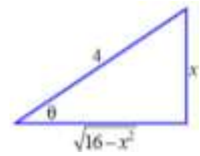


Solución: Sea $x=5\sec\theta$, entonces $dx=5\sec\theta\tan\theta d\theta$ y sustituyendo tenemos

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}=\int\frac{5\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{(5\sec\theta)^2-25}}=\int\frac{5\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{25\sec^2\theta-25}}=\int\frac{5\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{25(\sec^2\theta-1)}}=\int\frac{5\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{25\tan^2\theta}}$$

$$=\int\frac{5\sec\theta\tan\theta d\theta}{5\tan\theta}=\int\sec\theta d\theta=\ln(\sec\theta+\tan\theta)=\boxed{\ln\left(\tfrac{1}{5}x+\tfrac{1}{5}\sqrt{x^2-25}\right)+C}$$

Ejemplo 6: Encontrar $\int\frac{x^2}{16-x^2}dx$



Solución: Sea $x=4\sin\theta$, entonces $dx=4\cos\theta d\theta$ y sustituyendo tenemos

$$\int\frac{x^2}{16-x^2}dx=\int\frac{(4\sin\theta)^2}{16-(4\sin\theta)^2}4\cos\theta d\theta=\int\frac{64\sin^2\theta\cos\theta d\theta}{16-16\sin^2\theta}=\int\frac{64\sin^2\theta\cos\theta d\theta}{16(1-\sin^2\theta)}=\int\frac{4\sin^2\theta\cos\theta d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=4\int\frac{\sin^2\theta d\theta}{\cos\theta}=4\int\frac{(1-\cos^2\theta)d\theta}{\cos\theta}=4\int(\sec\theta-\cos\theta)d\theta=\boxed{4\left[\ln(\sec x+\tan x)-\sin x\right]+C}$$

Bloque II. Actividad 5. Integración por Fracciones Parciales.

Ejemplo 1: Encontrar $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$

Solución.

Paso 1: Factorizar el denominador; tenemos $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

Paso2: Sustituir el denominador por sus factores y separar en fracciones

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx=\int \frac{x+5}{(x+2)(x-1)}dx=\int\left[\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}\right]dx$$

Paso 3: A partir de la igualdad $\frac{x+5}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}$

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm $(x+2)(x-1)$

Quedando $x+5=A(x-1)+B(x+2)$

Luego simplificando

$$x+5=Ax-A+Bx+2B$$
$$x+5=(A+B)x+(-A+2B)$$

Obtenemos el sistema $\begin{array}{r} A+B=1 \\ -A+2B=5 \end{array}$ y resolviendo tenemos que $B=2,\quad A=-1$

Paso 4: Sustituimos los valores encontrados en la integral y resolvemos.

$$\int\left[\frac{-1}{(x+2)}+\frac{2}{(x-1)}\right]dx=-\int\frac{dx}{(x+2)}+2\int\frac{dx}{(x-1)}=\boxed{-\ln(x+2)+2\ln(x-1)+C}$$

Ejemplo 2: Encontrar $\int \frac{x+2}{(x-1)^2}dx$

Solución. Paso 1: Factorizar el denominador; tenemos $(x-1)^2=(x-1)(x-1)$

Paso2: Cuando un factor aparece más de una vez se sustituye el denominador como sigue

$$\int \frac{x+2}{(x-1)^2}dx=\int\left[\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}\right]dx$$

Paso 3: A partir de la igualdad $\frac{x+2}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}$

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm del denominador $(x-1)^2$

Quedando $x+2=A(x-1)+B$

Luego simplificando

$$x+2=A(x-1)+B=Ax-A+B$$
$$x+2=Ax+(-A+B)$$

Obtenemos el sistema $\begin{array}{r} A=1 \\ -A+B=2 \end{array}$ y resolviendo tenemos que $A=1,\quad B=3$

Paso 4: Sustituimos los valores encontrados en la integral y resolvemos.

$$\int\left[\frac{1}{(x-1)}+\frac{3}{(x-1)^2}\right]dx=\int\frac{dx}{(x-1)}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\boxed{\ln(x-1)-3\left(\frac{1}{x-1}\right)+C}$$

Ejemplo 3: Encontrar $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx$

Solución.

Paso 1: Factorizar el denominador; tenemos $x^3+4x = x\left(x^2+4\right)$

Paso2 : Cuando aparece en el denominador un factor cuadrático se sustituye el numerador como:

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx = \int \frac{2x^2-x+4}{x\left(x^2+4\right)}dx = \int \left[\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{\left(x^2+4\right)}\right]dx$$

Paso 3: A partir de la igualdad $\frac{2x^2-x+4}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{\left(x^2+4\right)}$

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm $x\left(x^2+4\right)$

Quedando $2x^2-x+4 = A\left(x^2+4\right)+\left(Bx+C\right)x$

Luego simplificando

$$2x^2-x+4 = Ax^2+4A+Bx^2+Cx$$
$$2x^2-x+4 = \left(A+B\right)x^2+Cx+4A$$

Obtenemos el sistema $\begin{array}{l} A+B=2 \\ C=-1 \\ 4A=4 \end{array}$ y resolviendo tenemos que $C=-1,\ \ A=1,\ \ B=1$

Paso 4: Sustituimos los valores encontrados en la integral y resolvemos.

$$\int \left[\frac{1}{x} + \frac{x-1}{\left(x^2+4\right)}\right]dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx = \boxed{\ln x + \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) - \tfrac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C}$$

Ejemplo 4: Encontrar $\int \frac{1}{x\left(x+1\right)}dx$

Solución: $\int \frac{1}{x\left(x+1\right)}dx = \int \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}\right]dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}\right]dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx = \ln x - \ln\left(x+1\right) + C$

ya que $\frac{1}{x\left(x+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$, y entonces $\begin{array}{l} 1 = A\left(x+1\right)+Bx \\ 1 = Ax+A+Bx \\ 1 = \left(A+B\right)x+A \end{array}$ de donde $\begin{array}{l} A+B=0 \\ A=1 \end{array}$ por lo que $\begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \end{array}$

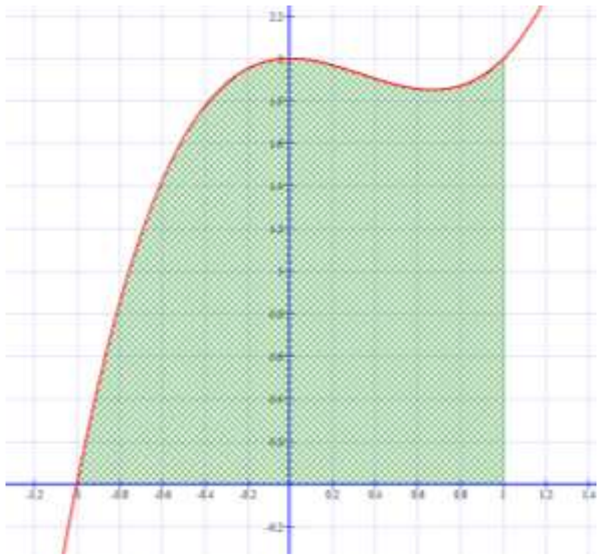
Bloque III. Actividad 2. Área Bajo la Curva.

EJEMPLO 1.- Encuentre el área bajo la curva $f(x)=x^3-x^2+2$ en el intervalo $[-1,1]$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN: Por el Teorema fundamental del Cálculo el área bajo la curva $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ está dada por $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, en donde $F'(x)=f(x)$, por lo que se debe evaluar la integral, $\int_{-1}^{1}\left(x^3-x^2+2\right)dx$

$$\int_{-1}^{1}\overbrace{\left(x^3-x^2+2\right)}^{f(x)}dx=\overbrace{\left(\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{1}{3}x^3+2x\right)}^{F(x)}\Big|_{-1}^{2}=\overbrace{\left[\tfrac{1}{4}(1)^4-\tfrac{1}{3}(1)^3+2(1)\right]}^{F(b)}-\overbrace{\left[\tfrac{1}{4}(-1)^4-\tfrac{1}{3}(-1)^3+2(-1)\right]}^{F(a)}$$

$$=\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3}+2\right)-\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-2\right)=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3}+2-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3}+2=\boxed{3\tfrac{1}{3}}$$

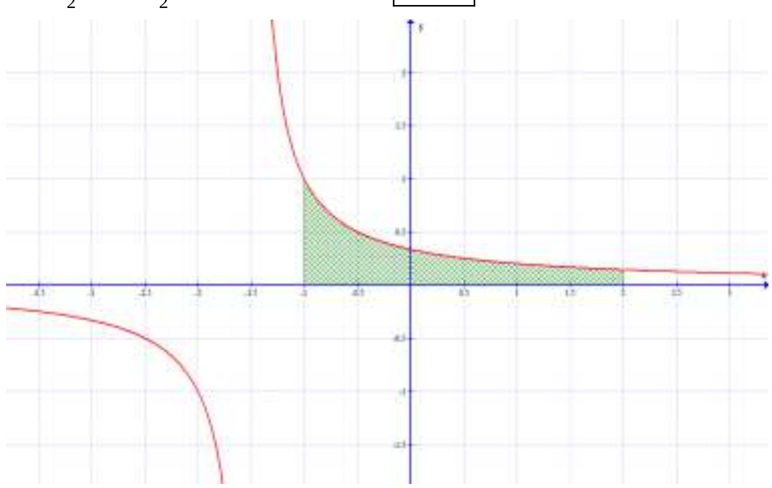


EJEMPLO 2.- Encuentre el área bajo la curva $f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$ en el intervalo $[-1,2]$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN: Se debe evaluar la integral $\int_{-1}^{2}\dfrac{1}{2x+3}dx$.

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{2x+3}dx=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{2}\frac{2dx}{2x+3}=\tfrac{1}{2}\ln(2x+3)\Big|_{-1}^{2}=\tfrac{1}{2}\left[\ln\left(2(2)+3\right)\right]-\tfrac{1}{2}\left[\ln\left(2(-1)+3\right)\right]$$

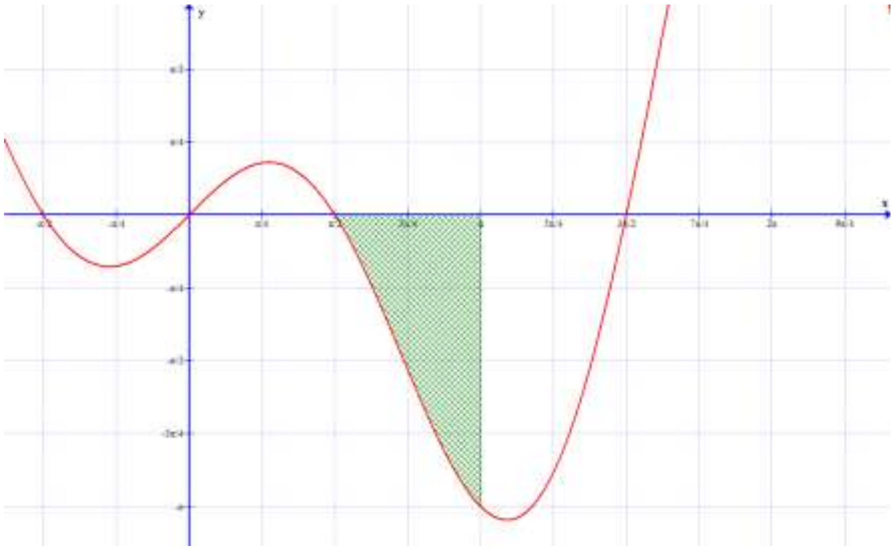
$$=\tfrac{1}{2}\ln 7-\tfrac{1}{2}\ln 1=0.973-0=\boxed{0.973}$$



EJEMPLO 3.- Encuentre el área bajo la curva $f(x) = x\cos x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN: Se debe evaluar la integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x dx$ Recuerda que $\pi = 180^{\circ}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x dx = (x\text{sen}x + \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = [\pi\text{sen}\pi + \cos\pi] - \left[\tfrac{\pi}{2}\text{sen}\tfrac{\pi}{2} + \cos\tfrac{\pi}{2}\right] = [\pi(0) + (-1)] - \left[\tfrac{\pi}{2}(1) + (0)\right] = -1 - \tfrac{\pi}{2} = -2.57$$



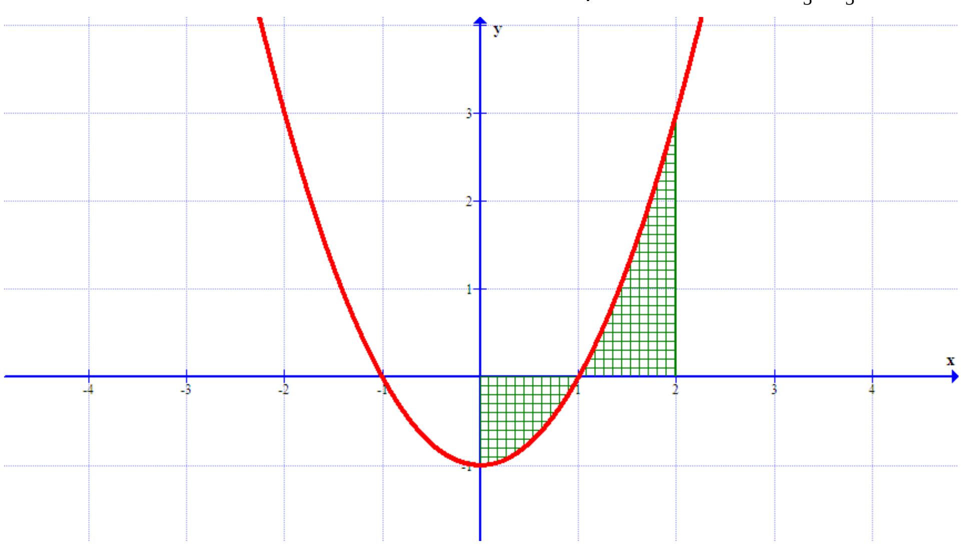
EJEMPLO 4.- Encuentre el área bajo la curva $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[0, 2]$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN: Se debe evaluar la integral $\int_0^2 (x^2 - 1) dx$ pero en la gráfica observamos que se debe resolver en dos partes; primero la parte debajo del eje X, y después la parte que está sobre el eje X.

$$\int_0^1 (x^2 - 1) dx = \tfrac{1}{3}x^3 - x\Big|_0^1 = \left[\tfrac{1}{3}(1)^3 - (1)\right] - \left[\tfrac{1}{3}(0)^3 - (0)\right] = \left[\tfrac{1}{3} - 1\right] - [0] = -\tfrac{2}{3}$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \tfrac{1}{3}x^3 - x\Big|_1^2 = \left[\tfrac{1}{3}(2)^3 - (2)\right] - \left[\tfrac{1}{3}(1)^3 - (1)\right] = \left[\tfrac{8}{3} - 2\right] - \left[\tfrac{1}{3} - 1\right] = \left[\tfrac{2}{3}\right] - \left[-\tfrac{2}{3}\right] = \tfrac{4}{3}$$

El área total es la suma absoluta de las áreas parciales es decir $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$



Bloque III. Actividad 3. Área entre Curvas.

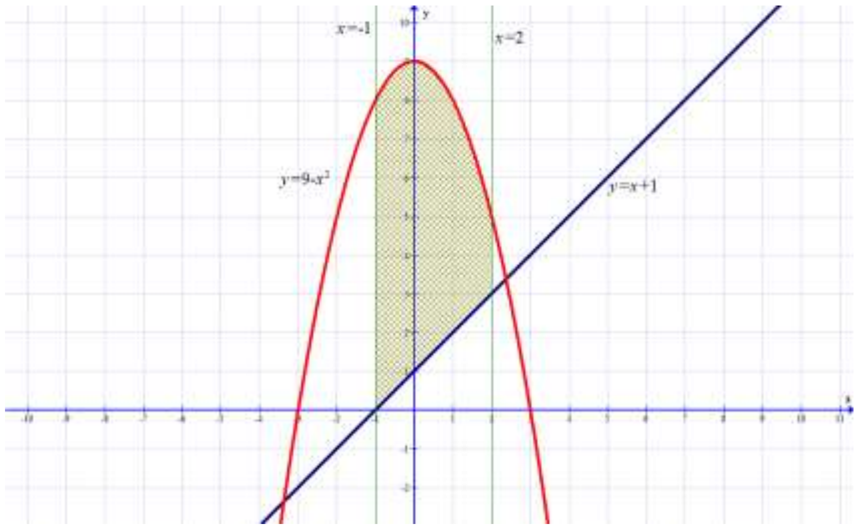
EJEMPLO 1.- Trace la región delimitada por las curvas $y=9-x^2, \quad y=x+1, \quad x=-1, \quad x=2$.

SOLUCIÓN: El área entre las curvas $y=f(x)$, y $y=g(x)$, y entre $x=a$ y $x=b$ es $\int_a^b \left| f(x)-g(x) \right| dx$, así que al observar la grafica de estas funciones vemos que se debe evaluar $\int_{-1}^{2} \left| \left(9-x^2\right)-\left(x+1\right) \right| dx$

$$\int_{-1}^{2} \left| \left(9-x^2\right)-\left(x+1\right) \right| dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2-x+8\right) dx = \left(-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+8x\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$=\left[-\tfrac{1}{3}(2)^3-\tfrac{1}{2}(2)^2+8(2)\right]-\left[-\tfrac{1}{3}(-1)^3-\tfrac{1}{2}(-1)^2+8(-1)\right]$$

$$=\left(-\tfrac{8}{3}-2+16\right)-\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}-8\right)=-\tfrac{8}{3}+14-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}+8=\boxed{19\tfrac{1}{2}}$$

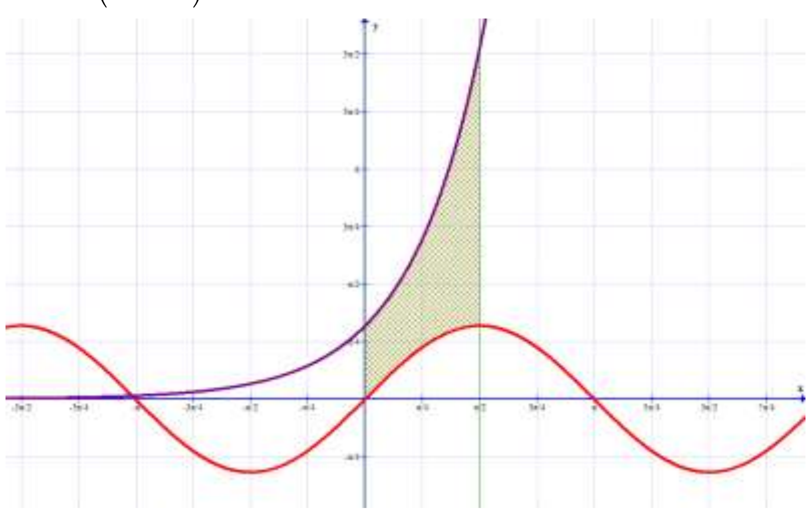


EJEMPLO 2.- Trace la región delimitada por las curvas $y=\operatorname{sen}x, \quad y=e^x, \quad x=0, \quad x=\pi/2$.

SOLUCIÓN: Se debe evaluar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \left(e^x\right)-\left(\operatorname{sen}x\right) \right| dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \left(e^x\right)-\left(\operatorname{sen}x\right) \right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x-\operatorname{sen}x\right) dx = \left(e^x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}+\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right]-\left[e^{(0)}+\cos(0)\right]$$

$$=\left(e^{\frac{\pi}{2}}+0\right)-(1+1)=e^{\frac{\pi}{2}}-2=4.81-2=\boxed{2.81}$$

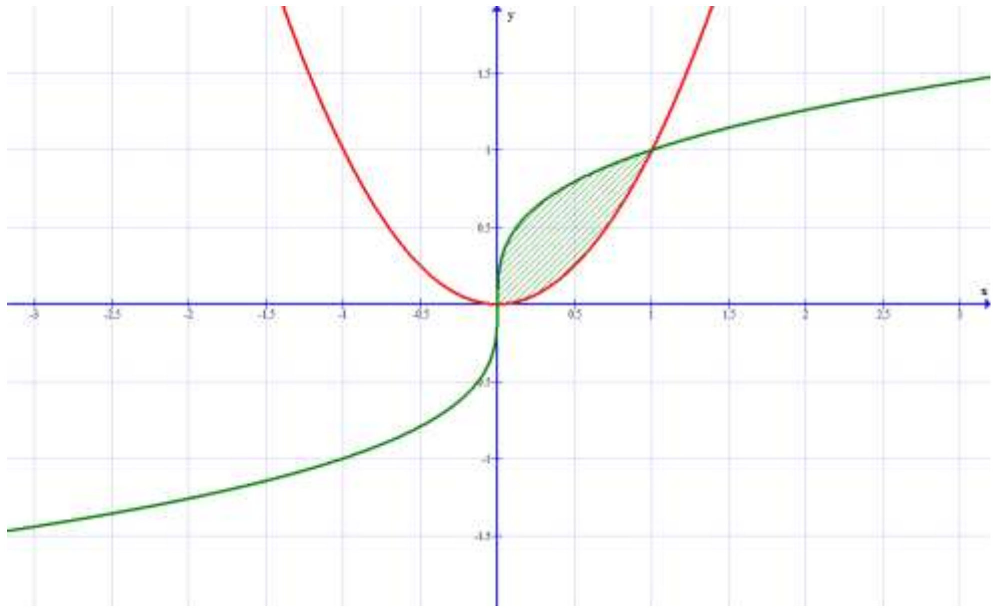


EJEMPLO 3.- Calcule el área de la región delimitada por las curvas $y=\sqrt[3]{x},\ y=x^2$.

SOLUCIÓN: Al observar la grafica vemos que se debe evaluar en $[0,1]$, es decir se debe encontrar la integral:

$$\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}-x^2\right)dx=\int_0^1\left(x^{1/3}-x^2\right)dx=\left(\tfrac{1}{4/3}x^{4/3}-\tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\left(\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-\tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$=\left(\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{(1)^4}-\tfrac{1}{3}(1)^3\right)-\left(\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{(0)^4}-\tfrac{1}{3}(0)^3\right)=\left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{3}\right)-(0)=\boxed{\tfrac{5}{12}}$$



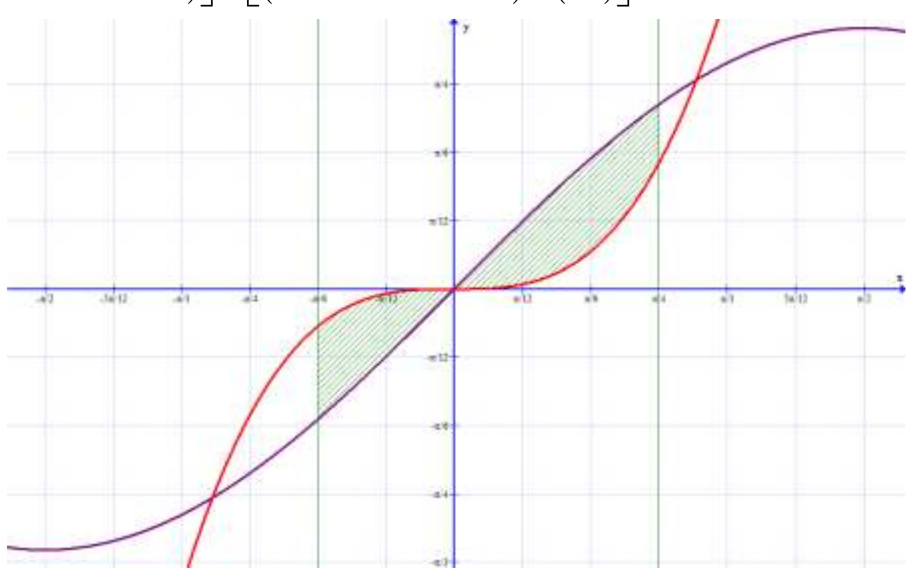
EJEMPLO 4.- Calcule el área de la región delimitada por las curvas $y=\operatorname{sen}x,\quad y=x^3,\quad x=-\pi/6,\quad x=\pi/4$.

SOLUCIÓN: Al observar la grafica vemos que se debe evaluar en $\left[-\pi/6,0\right]$ y en $\left[0,\pi/4\right]$ y encontrar la integral:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\left(x^3-\operatorname{sen}x\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{sen}x-x^3\right)dx=\left(\tfrac{1}{4}x^4+\cos x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0}+\left(-\cos x-\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\left(-\tfrac{1}{4}(0)^4+\cos(0)\right)-\left(\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)^4+\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right)\right]+\left[\left(-\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)-\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)^4\right)-\left(-\cos(0)-\tfrac{1}{4}(0)^4\right)\right]$$

$$=\left[(1)-(0.1879+0.8660)\right]+\left[(-0.7071-0.0951)-(-1)\right]=\boxed{0.1439}$$



EJEMPLO 5.- Trace la región delimitada por las curvas $y=\sqrt{x}, \quad y=1/x, \quad x=1/4, \quad x=4$.

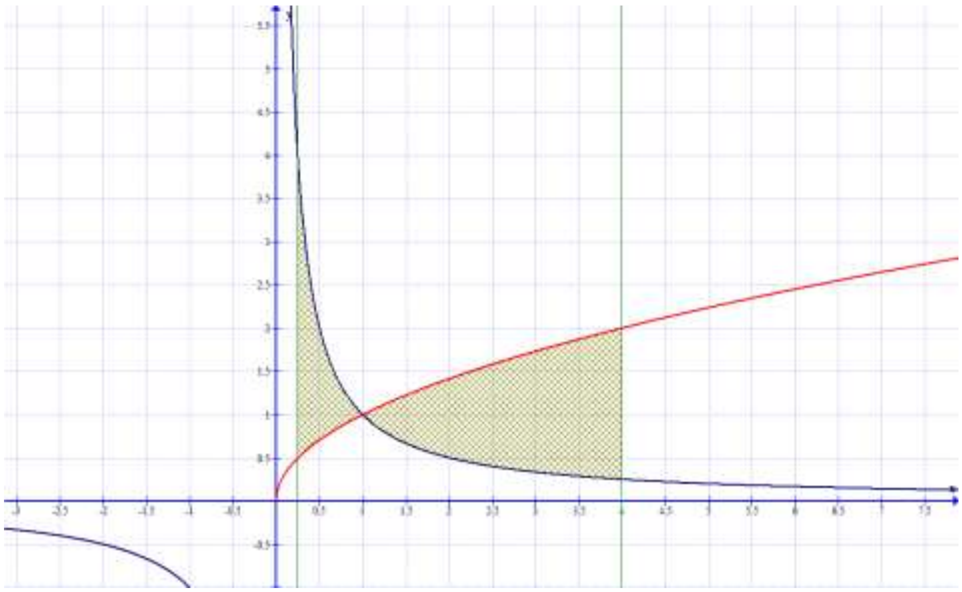
SOLUCIÓN: Al observar la gráfica de estas funciones vemos que se debe evaluar en dos intervalos

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[(1/x)-\sqrt{x}\right]dx+\int_{1}^{3}\left[\sqrt{x}-(1/x)\right]dx$$

$$=\left(\ln x-\tfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}+\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{x^3}-\ln x\right)\Big|_{1}^{4}$$

$$=\left[\left(\ln(1)-\tfrac{2}{3}\sqrt{(1)^3}\right)-\left(\ln\left(\tfrac{1}{4}\right)-\tfrac{2}{3}\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^3}\right)\right]+\left[\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{(4)^3}-\ln(4)\right)-\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{(1)^3}-\ln(1)\right)\right]$$

$$=\left[(0-0.66)-(-1.38-0.083)\right]+\left[(5.33-1.38)-(0.66-0)\right]=\boxed{6.16}$$

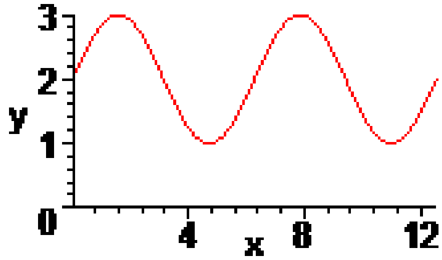


Bloque IV. Actividad 1. Volumen de revolución.

1. **Encuentre el volumen de revolución generado por el área bajo la curva** $f(x) = \text{sen}x + 2$ en $[0, 4\pi]$ **al girar alrededor del eje X.**

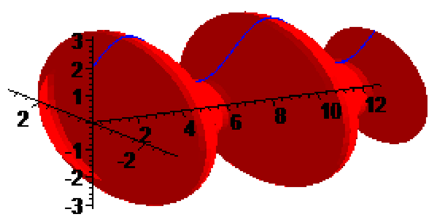
   Mostrar:
   i) la gráfica de la función en el intervalo indicado.
   ii) La gráfica del cuerpo geométrico generado.
   iii) La integral que debe resolverse para encontrar el volumen.
   iv) El volumen del cuerpo geométrico generado.

```
> plot(sin(x)+2, x=0..4*Pi, y=0..3);
```




```
>
> VolumeOfRevolution(sin(x)+2, x = 0 .. 4*Pi, output = plot);
```

The Volume of Revolution Around the Horizontal Axis of
f(x) = sin(x)+2
on the Interval [0, 4*Pi]




```
> VolumeOfRevolution(sin(x)+2, x = 0 .. 4*Pi, output = integral);
```

$$\int_0^{4\pi} \pi (\sin(x) + 2)^2 \, dx$$

```
> VolumeOfRevolution(sin(x)+2, x = 0 .. 4*Pi, output = value);
```

$$18\pi^2$$

```
> evalf(%);
```

$$177.6528793$$

```
>
```

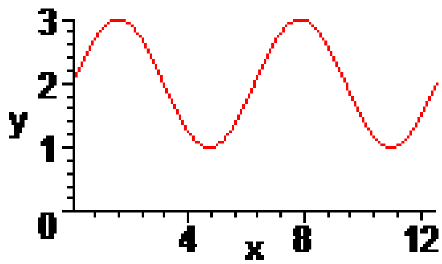
$$V = \int_0^{4\pi} \pi (\sin(x) + 2)^2 \, dx = 18\pi^2 = 177.6528793$$

2. Encuentre la superficie de revolución generada por el arco de la curva $f(x) = \operatorname{sen} x + 2$ en $[0, 4\pi]$ **al girar alrededor del eje X.**

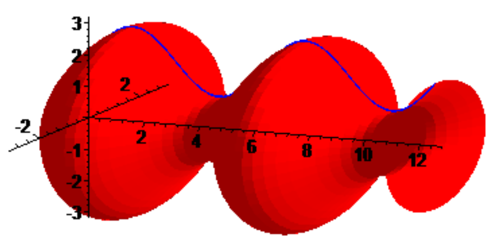
Mostrar:

v) la gráfica de la función en el intervalo indicado.
vi) La gráfica del cuerpo geométrico generado.
vii) La integral que debe resolverse para encontrar la superficie.
viii) La superficie del cuerpo geométrico que genera la curva.

```
> plot(sin(x)+2, x=0..4*Pi, y=0..3);
```




```
>
> SurfaceOfRevolution(sin(x)+2, x = 0 .. 4*Pi, output = plot);
```




```
> SurfaceOfRevolution(sin(x)+2, x = 0 .. 4*Pi, output = integral);
```

$$\int_0^{4\pi} 2\pi(\sin(x)+2)\sqrt{1+\cos(x)^2}\,dx$$

```
> SurfaceOfRevolution(sin(x)+2, x = 0 .. 4*Pi, output = value);
```

$$32\pi\sqrt{2}\,\mathrm{EllipticE}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

```
> evalf(%);
```

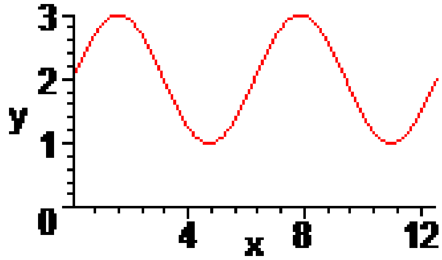
$$192.0240849$$

$$S = \int_0^{4\pi} 2\pi(\sin(x)+2)\sqrt{1+\cos(x)^2}\,dx = 192.0240849$$

3. **Encuentre la longitud del arco de la curva** $f(x) = \text{sen}x + 2$ en $[0, 4\pi]$.

Mostrar:
ix) la gráfica de la función en el intervalo indicado.
x) La integral que debe resolverse para encontrar la longitud del arco.
xi) La longitud del arco indicado.

```
>
> plot(sin(x)+2, x=0..4*Pi, y=0..3);
```




```
> ArcLength(sin(x)+2, x = 0 .. 4*Pi, output = integral);
```

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \cos(x)^2}\, dx$$

```
> ArcLength(sin(x)+2, x = 0 .. 4*Pi, output = value);
```

$$8\sqrt{2}\ \text{EllipticE}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$15.28079115$$

```
>
```

$$L = \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \cos(x)^2}\, dx = 15.28079115$$

Fuentes de Consulta.

STEWART, J. (2007). *CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.* MÉXICO: CENGAGE LEARNING.
SALAZAR, BAHENA Y VEGA. (2007). *CÁLCULO INTEGRAL.* MÉXICO: GRUPO EDITORIAL PATRIA.
LEITHOLD, L., (2009). *EL CÁLCULO.* MÉXICO: OXFORD UNIVERSITY PRESS.
Granville y Smith., (2010). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: Limusa.

http:/ /www.matematicasbachiller.com/ temario/
http:/ /www.cidse.itcr.ac.cr/ cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/ index.htm
http:/ /www.amolasmates.es/ pdf/Temas/2BachCT/ Integral%20definida.pdf
http:/ /www.cidse.itcr.ac.cr/ cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/ curso-elsie/ aplicacionesintegral/html/ aplicaciones-integral.pdf

FORMULARIO DE DIFERENCIALES

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$	$dy = f'(x)dx$	$du = u'dx \qquad dv = v'dx$

DIFERENCIALES BÁSICAS Y DE OPERACIONES CON FUNCIONES

$d(C) = 0$	$d(x) = dx$	$d(x^n) = nx^{n-1}dx$	$d(C \cdot u) = C \cdot du$
$d(u^n) = nu^{n-1}du$ Regla de la potencia	$d(u+v) = du + dv$ Regla de la suma	$d(uv) = du \cdot v + dv \cdot u$ Regla del producto	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du \cdot v - dv \cdot u}{v^2}$ Regla del cociente

DIFERENCIALES DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

$d(\log u) = \log e \dfrac{1}{u} du$	$d(\ln u) = \dfrac{1}{u} du$	$d(C^u) = \ln C C^u du$	$d(e^u) = e^u du$

DIFERENCIALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$d(\operatorname{sen} u) = \cos u\, du$	$d(\tan u) = \sec^2 u\, du$	$d(\sec u) = \sec u \tan u\, du$
$d(\cos u) = -\operatorname{sen} u\, du$	$d(\cot u) = -\csc^2 u\, du$	$d(\csc u) = -\csc u \cot u\, du$

DIFERENCIALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$d(\operatorname{arcsen} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$	$d(\arctan u) = \dfrac{1}{1+u^2} du$	$d(\operatorname{arcsec} u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du$
$d(\arccos u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$	$d(\operatorname{arccot} u) = -\dfrac{1}{1+u^2} du$	$d(\operatorname{arccsc} u) = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du$

FORMULARIO DE INTEGRALES

DEFINICIÓN DE INTEGRAL	INTEGRALES BÁSICAS DE FUNCIONES			INTEGRAL POR PARTES
$\int f(x)dx = F(x) + C$	$\int du = u + C$	$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$	$\int a\,du = a \int du$	$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

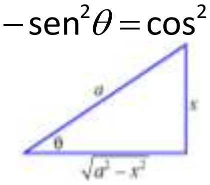
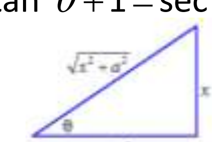
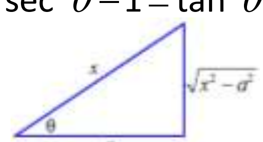
INTEGRALES CON FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

$\int \dfrac{1}{u} du = \ln u + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$	$\int \ln u\, du = u \ln u - u + C$

INTEGRALES CON FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$	$\int \tan u\, du = \ln(\sec u) + C$	$\int \sec u\, du = \ln(\sec u + \tan u) + C$
$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$	$\int \cot u\, du = -\ln(\csc u) + C$	$\int \csc u\, du = \ln(\csc u - \cot u) + C$
$\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\operatorname{sen} u \cos u + C$	$\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$	$\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$
$\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\operatorname{sen} u \cos u + C$	$\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$	$\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$
$\int \operatorname{sen} u \cos u\, du = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 u + C$	$\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$	$\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$
$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\dfrac{u}{a} + C$	$\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{u}{a} + C$	$\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arcsec}\dfrac{u}{a} + C$

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$\sqrt{a^2-x^2} \qquad x = a\operatorname{sen}\theta$	$\sqrt{x^2+a^2} \qquad x = a\tan\theta$	$\sqrt{x^2-a^2} \qquad x = a\sec\theta$
$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$
		

CEB 4/2
Academia de Matemáticas
L. M. A. Juan Manuel Valdez Chávez